

ブラウン運動の局所時間の漸近的性質

東京工業大学大学院理工学研究科修士 2 年

03M00160 高橋 直人

2005 年 2 月 21 日

Abstract

This paper surveys asymptotic properties of Brownian local time, more specifically the law of iterated logarithm for local time and the asymptotic property for favorite site.

Let $l(t, x)$ be the local time at x for one-dimensional Brownian motion. For each t , let $V(t)$ denote the set of favorite sites where $\mathbb{V}(t) := \{x \in \mathbb{R}; l(t, x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} l(t, y)\}$. Bass and Griffin initiated the study of Brownian favorite sites and proved that the distance from origin to $V(t)$ is transient with probability 1. Recently, Lifshits and Shi presented two new propositions about asymptotic property for favorite sites. But we found a crucial error in the proof of one of these propositions. Moreover, we succeeded in improving a result from Bass and Griffin. However, there are many open questions for favorite sites.

In order to comprehend asymptotic properties of Brownian favorite site, it is helpful to study the law of iterated logarithm for local time, which Kesten first proved. We studied from the large deviation principle developed by Donsker and Varadhan the law of iterated logarithm for local time, and studied the asymptotic property for favorite site.

目次

1	はじめに	2
2	Local time	4
2.1	Local time の定義と性質	4
2.2	Local time の重複対数の法則	6
3	大偏差原理	7
3.1	Schilder の大偏差原理	7
3.2	Donsker-Varadhan の大偏差原理	10
4	Favorite site	17
4.1	Brown 運動の favorite site	17
4.2	ランダムウォークの favorite site	29

1 はじめに

$\{S_n\}_{n=0}^\infty$ を原点から出発する 1 次元単純ランダムウォーク, すなわち $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ を独立同分布で, $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ をみたすものとして, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ($n \geq 1$) と定義する. $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{Z}$ に対してランダムウォークの local time $N(n, x)$ を以下で定める.

$$N(n, x) := \#\{k \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq k \leq n, S_k = x\}$$

ただし, $\#A$ は集合 A の要素の数である. ランダムウォークの favorite site の集合 $\mathbb{U}(n)$ を

$$\mathbb{U}(n) := \{x \in \mathbb{Z}; N(n, x) = \max_{y \in \mathbb{Z}} N(n, y)\}$$

で定義する. $\mathbb{U}(n)$ の元が favorite site である. このうち絶対値が最小のものを $\underline{U}(n)$, 絶対値が最大のものを $\overline{U}(n)$ とおく.

Eldös, Révész [8] は, 1984 年にはじめてランダムウォークの favorite site についての研究を行い, 以下の結果を得た.

定理 1.1 (Eldös, Révész [8]) 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\overline{U}(n)|}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1.$$

さらに Eldös, Révész [8] は, 同じ論文で favorite site の漸近挙動について以下の問題を出した. $P(|\underline{U}(n)| = 0 \text{ i.o.}) > 0$ といえるか, すなわち 0 は無限回 favorite site となり得るか, というものである. 少し考えてみると, ランダムウォークは確率 1 で原点に無限回到達することから, 直感的には上の予想は正しいように見える. しかし少々驚くべきことに, Eldös, Révész の問題は, 翌年 Bass, Griffin [1] によって否定的に解決された. もっと詳しく, ランダムウォークの favorite site の漸近挙動について以下の結果を得た.

定理 1.2 (Bass, Griffin [1]) 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\underline{U}(n)|}{\sqrt{n}(\log n)^{-\gamma}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \gamma < 1 \\ \infty & \text{if } \gamma > 11. \end{cases} \quad (1.1)$$

上の定理でとくに $\gamma = 12$ とすることで直ちに,

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} |\underline{U}(n)| = \infty) = 1$$

がわかる. すなわち favorite site は確率 1 で transient であり, Eldös, Révész の予想が誤りであることがわかる.

定理 1.2 で, $1 \leq \gamma \leq 11$ の場合の favorite site の漸近挙動が当面の問題となるが, Lifshits, Shi [11] は 2004 年に式 (1.1) で $\gamma = 1$ の場合も $\liminf$ が 0 となることを示した. すなわち,

定理 1.3 (Lifshits, Shi [11]) 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\underline{U}(n)|}{\sqrt{n}(\log n)^{-1}} = 0.$$

さらに, Lifshits, Shi [11] は同じ論文で式 (1.1) の $\gamma > 11$ を $\gamma > 1$ とした場合でも $\liminf$ が ∞ となると書いたが, 著者は Lifshits, Shi の論文の証明に重大な誤りがあることを指摘した. この事実については電子メールにて直接本人に連絡し, 誤りも確認済である. そのため, $1 < \gamma \leq 11$ での favorite site の漸近挙動がどのようなになるかが当面の問題として残っていたが, 著者は本論文で定理 1.2 における $\gamma > 10$ への改良に成功した. すなわち,

定理 1.4 $\gamma > 10$ のとき, 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\underline{U}(n)|}{\sqrt{n}(\log n)^{-\gamma}} = \infty.$$

著者は最初, 定理 1.3 の証明を修正することで, favorite site の $\liminf$ の $1 < \gamma \leq 11$ への拡張を考えたのだが, これはうまくいかなかった. そこで, 定理 1.2 の証明方法を利用することでうまくいかないかと考えたところ, 上の定理を証明することが出来た. しかし, 定理 1.2 の方法からではこれ以上の拡張をすることは難しく, $1 < \gamma \leq 10$ への拡張については別の方法を使う必要があると思われる.

一方, Brown 運動の local time $l(t, x)$ についても favorite site の集合 $\mathbb{V}(t)$ が同様にして定義できる. この場合もランダムウォークの場合と同様の結果 (c.f. 定理 1.1 ~ 1.4) が成り立つ. Brown 運動の favorite site の $\liminf$ についても, 先に述べたように Lifshits, Shi の論文の証明で著者が誤りを指摘したために $1 < \gamma \leq 10$ の場合は未解決である.

そこで, Brown 運動の favorite site の漸近挙動について理解するために, まず local time の重複対数の法則を勉強した. favorite site の漸近挙動が local time の重複対数の法則とどういう関わり合いになっているかに興味があった. Local time の重複対数の法則それ自身は先に Kesten [10] による結果があるが, それを別の角度, おもに Donsker-Varadhan の大偏差原理の立場から見ることにした. このとき Kesten の結果の一部については, 大偏差原理から容易に示せることがわかった. さらに大偏差原理の立場から local time の favorite site の性質について調べてみた. $V(t)$ の $\limsup$ についての漸近挙動は大偏差原理の立場から見た場合, 容易に推測できたが, $\liminf$ についてはわからなかった.

本論文はおもに local time の漸近的性質のサーベイである. まず local time の定義を行ない, その性質について簡単に触れる. 次に Schilder type と Donsker-Varadhan type の 2 つのタイプの大偏差原理を紹介して, 大偏差原理の結果を local time の重複対数の法則に適用する. その後, Brown 運動の favorite site を定義し, 関連する結果を紹介する. その際に, 大偏差原理の立場から見た favorite site について少し触れる. さらに, Lifshits, Shi の結果の誤りについて指摘し, 定理 1.4 の証明をおこなう. 最後に, ランダムウォークの favorite site について一言述べる.

2 Local time

まず, この論文を通して重要な概念である Brown 運動の local time を定義する.

2.1 Local time の定義と性質

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\{W(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ を 1 次元 Brown 運動とする. 固定した $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ に対して, 確率 1 で

$$l(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \text{meas}\{0 \leq s \leq t; |W(s) - x| \leq \varepsilon\} \quad (2.1)$$

が定義できる. ただし, meas はルベーグ測度である. さらに, version をとり直すことで $l(t, x)$ は t と x の 2 変数関数として連続に修正がとれる (Trotter [14]). この $l(t, x)$ を (Brown 運動の) local time と呼ぶ. 以下, local time の性質について調べる.

定義よりまず, x を固定したとき, $l(\cdot, x)$ は単調非減少, t を固定したとき, $l(t, \cdot)$ は compact support をもつ非負連続関数である. また, 任意の Borel 関数 $f \geq 0$ に対して

$$\int_0^t f(W(s))ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)l(t, x)dx \quad a.s.$$

である. とくに, 任意の $t \geq 0$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} l(t, x)dx = t \quad a.s.$ である.

local time の性質について調べるには, 以下の inverse local time を導入すると都合がよい. Brown 運動の原点における inverse local time τ_r を

$$\tau_r := \inf\{t \geq 0; l(t, 0) > r\} \quad (2.2)$$

で定義する. これは τ_r が原点での local time $l(t, 0)$ の逆関数であることを示している. 定義より明らかに τ_r は確率 1 で右連続で, $l(\tau_r, 0) = r \quad a.s.$ である.

次の補題は Brown 運動のスケール変換による不変性を使えば直ちに出てくる.

補題 2.1 任意の $c > 0$ に対して

$$\begin{aligned} (1) \quad \{l(t, x); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\} &\stackrel{d}{=} \{c^{-1}l(c^2t, cx); t \geq 0, x \in \mathbb{R}\} \\ (2) \quad \{l(\tau_r, x); r \geq 0, x \in \mathbb{R}\} &\stackrel{d}{=} \{c^{-1}l(\tau_{cr}, cx); r \geq 0, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

local time の解析において重要な Ray-Knight の定理を紹介する. Ray-Knight の定理はいくつかあるが, ここでは, Revuz-Yor ([13]) の Chapter XI. 定理 2.3 (p456) にある“second Ray-Knight theorem”を紹介する. そのためにまず, 新たな拡散過程を定義する.

$\gamma \geq 0$ に対して, 確率微分方程式

$$dY_t = 2\sqrt{Y_t}dB_t + \gamma dt$$

の形の拡散過程を γ 次元 squared Bessel 過程という. $\gamma = 0$ のときは, $a > 0$ から出発する squared Bessel 過程は $x = 0$ で trap となっている. さらに, 0 次元 squared Bessel 過程は局所マルチンゲールであることから scale function は natural すなわち $s(x) = x$ であることに注意しておく.

このとき, 以下の Ray-Knight の (第 2) 定理が成り立つ.

定理 2.2 (Ray-Knight の定理) $r > 0$ とする. このとき, 確率過程 $\{l(\tau_r, x)\}_{x \geq 0}$ は r から出発する 0 次元 *squared Bessel* 過程である.

定理 2.2 は, local time の時刻 t に stopping time τ_r を入れて, 空間 x を時間のパラメータだと思って新たな確率過程としたときに, それが都合の良いマルコフ過程であることを意味している. Ray-Knight の定理の証明は, Revuz-Yor ([13]) にあるのでここでは証明を省略する. 上の定理を使えば local time についての以下の性質が導かれる (Bass, Griffin [1]).

補題 2.3 任意の $z \geq 0$ に対して $\{l(\tau_r, z) - r; r \geq 0\}$ はマルチンゲールである.

上の補題 2.3 を示す前に, 以下の local time のラプラス変換に関する補題をあげておく. 補題 2.4 の証明は省略する.

補題 2.4 任意の $r \geq 0, z > 0, u < 1/(2z)$ に対して

$$E[\exp(u l(\tau_r, z))] = \exp\left(\frac{ur}{1 - 2uz}\right)$$

[補題 2.3 の証明] まず Ray-Knight の定理を使えば, $M_t := \{l(\tau_r, t); t \geq 0\}$ は拡散過程であって, かつ scale function は natural である. さらに, M_t の二次変分を $\langle M \rangle_t$ としたとき, 補題 2.4 を使えば, $E[\langle M \rangle_t] < \infty$ であることがわかるので, $\{l(\tau_r, z); z \geq 0\}$ はマルチンゲールである. よって, $E[l(\tau_r, z)] = E[l(\tau_r, 0)] = r$ がわかる. ここで Brown 運動の強マルコフ性および独立増分性より, 任意の $z \geq 0$ に対して $\{l(\tau_r, z); r \geq 0\}$ は定常かつ独立増分なマルコフ過程であることに注意すれば, $\{l(\tau_r, z) - r; r \geq 0\}$ がマルチンゲールであることが直ちにわかる. $\square$

2.2 Local time の重複対数の法則

次に、現在知られている local time に関する重複対数の法則をここで紹介する。

例 1 $l(t, x)$ を Brown 運動の local time とする。このとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(t, 0)}{\sqrt{2t \log \log t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad a.s. \quad (2.3)$$

例 2
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} l(t, 0) = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad a.s. \quad (2.4)$$

例 3
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} \sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x) = \sqrt{2} q_0 \quad a.s. \quad (2.5)$$

ただし、 q_0 は Bessel 関数 $J_0(\cdot)$ の零点集合のうち、最小の正の数で、 $q_0 \sim 2.40483$ である。

例 1 は Kesten ([10]) による結果である。Kesten は同時に、例 3 の式 (2.5) の右辺が有限な正の定数 γ となり、 $\frac{q_0}{2} < \gamma < \frac{q_0^2}{\sqrt{2}}$ であることを示したが γ の値自身は求められなかった。 $\gamma = \sqrt{2} q_0$ を証明したのは Csáki Földes ([3]) である。

例 2 については、 $\{\sup_{0 \leq s \leq t} W(s)\}_{t \geq 0}$ と $\{l(t, 0)\}_{t \geq 0}$ が process として等しいことから

例 2'
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} W(s) = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad a.s.$$

を示すことと同値である。さらに、例 2' は以下の

例 2''
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |W(s)| = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad a.s.$$

がわかれば、Kolmogorov の 0-1 法則から直ちに出てくるので、例 2'' を示せば例 2 はその系として得られる。例 2'' は Chung ([2]) による結果である。

次章で local time に関する重複対数の法則を示すのに有効な大偏差原理を紹介する。大偏差原理の立場から見れば、例 1 および例 2'' はすぐに出てくる。一方、例 3 については大偏差原理からはすぐには出てこない。もっと詳しいことをやる必要があると思われるが、よくわからなかった。

3 大偏差原理

X を完備可分距離空間とし, $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ を X 上の確率測度の族とする. このとき, ある汎関数 $I(\cdot)$ が存在し, 次の性質を満たすとき, $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ は大偏差原理を満たすという.

- i) $0 \leq I(x) \leq \infty \quad \forall x \in X$ ii) I は下半連続
- iii) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し, $\{x \in X; I(x) \leq t\}$ は X でコンパクト
- iv) 任意の開集合 $O \subset X$ に対し

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(O) \geq - \inf_{x \in O} I(x) \quad (3.1)$$

- v) 任意の閉集合 $F \subset X$ に対し

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(F) \leq - \inf_{x \in F} I(x) \quad (3.2)$$

I は rate 関数と呼ばれている. これは, 確率測度の族 $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ の極限点がある一点 x_0 に weakly に収束していて, 任意の Borel 集合 A に対して, もし $x_0 \notin \bar{A}$ であれば $P_n(A)$ は $n \rightarrow \infty$ のときに指数的な速さで 0 に収束することを意味する. ただし $\bar{A}$ は A の閉包である. とくに, A を任意の Borel 集合としたとき, もし $\inf_{x \in A^\circ} I(x) = \inf_{x \in A} I(x) = \inf_{x \in \bar{A}} I(x)$ であれば, 式 (3.1) および (3.2) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(A) = - \inf_{x \in A} I(x)$$

である. ただし, A° は A の内部すなわち A の内点全体である.

以下, Schilder の大偏差原理と Donsker-Varadhan の大偏差原理という 2 つの大偏差原理の立場から, Strassen type の重複対数の法則と, Donsker-Varadhan type の重複対数の法則をそれぞれ見ていく. Donsker-Varadhan の大偏差原理はより広い一般のマルコフ過程についての話であるが, ここでは Brown 運動に話を限定して議論を進めていくことにする.

3.1 Schilder の大偏差原理

$C_0 := \{f \in C[0, \infty); f(0) = 0\}$, $C_0[0, 1] := \{f \in C[0, 1]; f(0) = 0\}$ とおき, P^W を C_0 上の Wiener 測度とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して P^W から定まる $\sqrt{\varepsilon} W(t)$ の確率測度を P^ε とする. $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $P^\varepsilon \rightarrow \delta_0$ (弱収束) であることに注意する. $C_0[0, 1]$ 上の Hilbert 空間 H を以下で定義する.

$$H := \left\{ f \in C_0[0, 1]; f \text{ は絶対連続で } f(t) = \int_0^t h(s) ds \text{ for some } h \in L^2[0, 1] \right\} \quad (3.3)$$

ただし H のノルムは $\|f\|_H := \sqrt{\int_0^1 |f'(s)|^2 ds}$ で定義する. $f \in C_0[0, 1]$ に対して rate 関数 $I: f \rightarrow [0, \infty]$ を以下で定義する.

$$I(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|f\|_H^2 & \text{if } f \in H \\ \infty & \text{if } f \notin H \end{cases}$$

定義より明らかに I は下半連続である. また, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\{f \in C_0[0, 1]; I(f) \leq t\}$ はコンパクトであることに注意する. このとき以下の Brown 運動についての大偏差原理が成り立つ.

定理 3.1 (Schilder の大偏差原理) 任意の開集合 $F \subset C_0[0, 1]$ に対して

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(F) \leq - \inf_{f \in F} I(f) \quad (3.4)$$

任意の開集合 $O \subset C_0[0, 1]$ に対して

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(O) \geq - \inf_{f \in O} I(f). \quad (3.5)$$

$A \subset C_0[0, 1]$ を任意の Borel 集合とする. もし $\bar{A}$ の元として $0 \leq t \leq 1$ で恒等的に 0 となるような関数を含まないのであれば, $P^\varepsilon(A)$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき 0 に収束するが, 定理 3.1 は, その収束が指数関数的であることを示している. Schilder の定理の証明は Deuschel and Stroock ([4]) にあるのでここでは証明しない. ポイントとなるのは次の Cameron-Martin の定理である.

定理 3.2 (Cameron-Martin の定理) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を有界変動関数, $\phi(t) := \int_0^t g(s)ds$ ($0 \leq t \leq 1$) として P^ϕ を P^W から定まる $w + \phi$ の法則とする. このとき P^ϕ と P^W は互いに絶対連続であって, Radon-Nikodym の密度関数は以下で与えられる.

$$\frac{dP^\phi}{dP^W} = \exp \left\{ \int_0^1 g dw - \frac{1}{2} \int_0^1 g^2 dt \right\}.$$

次に Schilder の大偏差原理の応用を 1 つ与える. 前と同じく P^W を C_0 上の Wiener 測度とする. $\xi^\lambda(\cdot) \in C_0[0, 1]$ をパラメータ λ ($\lambda > 3$) の過程として以下で定義する.

$$\xi^\lambda(t) := \frac{W(\lambda t)}{\sqrt{2\lambda \log \log \lambda}} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

スケール変換による不変性より, $B(t) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} W(\lambda t)$ もまた Brown 運動で, $\xi^\lambda(t) = \frac{B(t)}{\sqrt{2 \log \log \lambda}}$ であることに注意する. さらに $K := \{f \in H; \|f\|_H \leq 1\}$ とおく. このとき, 次の Strassen による重複対数の法則が成り立つ.

定理 3.3 (Strassen の重複対数の法則)

$$P^W \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\xi^\lambda; \lambda \geq n\}} = K \right] = 1. \quad (3.6)$$

ただし, 式 (3.6) での閉包は, $C_0[0, 1]$ の位相における閉包である. Strassen の定理の意味することは, 確率 1 で $\{\xi^\lambda(\cdot); \lambda > 3\}$ は $C_0[0, 1]$ のもとで相対コンパクトであって, $\lambda \rightarrow \infty$ としたときに任意の極限点は K の元にある, ということである. 逆に, 確率 1 で任意の $f \in K$ に対して $C_0[0, 1]$ の中で f に収束する (ξ^n) の部分列が存在する, ということである.

上の Strassen の定理よりとくに以下が成り立つ.

系 3.4 任意の $C_0[0, 1]$ 上の連続関数 Φ に対して

$$P^W \left[\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\xi^\lambda) = \sup_{f \in K} \Phi(f) \right] = 1.$$

Strassen の定理は, Brown 運動の軌跡が平均的な挙動よりも原点から遠くにあるときの偏差の度合いを見ている, といえる. Brown 運動 $W(t)$ の軌跡がもし平均的な挙動であれば $W(t)$ はだいたい $\sqrt{t}$ のオーダーで広がっていくので, 任意の x に対して $\xi^\lambda(x)$ は $\lambda \rightarrow \infty$ としたとき 0 に $(\log \log \lambda)^{-1/2}$ のオーダーで非常にゆっくりと収束していく. 一方, もし Brown 運動の軌跡が平均的な挙動よりも原点から遠くにある場合には, λ のある部分列 $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ があって, 必ずしも 0 ではない有限の値に収束していくことを意味する.

定理 3.3 の証明は Deuschel, Stroock ([4]) にあるので省略するが, ここでは証明の概要についてごく簡単に述べておく.

[定理 3.3 の証明の概要] まず $P^W[\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\xi^\lambda; \lambda \geq n\}} \subset K] = 1$ を示す. 任意の $\xi \in C_0[0, 1]$ に対して, $\text{dist}(\xi, K) := \inf_{f \in K} \|\xi - f\|_\infty$ とおいたとき, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi^\lambda, K) = 0$ a.s. を示せばよいが, その前に以下の補題を証明なしであげておく.

補題 3.5 任意の $f \in C_0$ に対して, $f^\lambda \in C_0[0, 1]$ を $f^\lambda(t) := \frac{f(\lambda t)}{\sqrt{2\lambda \log \log \lambda}}$ ($0 \leq t \leq 1$) として定める. このとき f が次の条件「任意の有理数 $1 < r < 2$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(f^{r^k}, K) = 0$ 」をみたすならば, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{dist}(f^\lambda, K) = 0$ をみたす. ここで, $K = \{f \in H; \|f\|_H \leq 1\}$ である.

上の補題より, 任意の $r \in (1, 2) \cap \mathbb{Q}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi^{r^k}, K) = 0$ a.s. を示せばよい. K_δ を K の C_0 上の δ 近傍とする. $\varepsilon := 1/(2 \log \log r^k)$ とおけば, $P^W[\xi^{r^k} \notin K_\delta] = P^\varepsilon(K_\delta^c)$ であるから, Schilder の定理の式 (3.4) より

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \log \log r^k} \log P^W[\xi^{r^k} \notin K_\delta] \leq - \inf_{f \notin K_\delta} I(f).$$

さらに, $\inf_{f \notin K_\delta} I(f) \geq \frac{1+\delta}{2}$ がわかるから, k が十分大きいとき,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[\xi^{r^k} \notin K_\delta] = \sum_{k=1}^{\infty} (k \log r)^{-1-\delta} < \infty$$

となって, Borel-Cantelli の補題から前半は示された. $P^W[\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\xi^\lambda; \lambda \geq n\}} \supset K] = 1$ については, Schilder の定理の式 (3.5) および独立事象列に関する Borel-Cantelli の補題から導き出されるが, 詳細については省略する. $\square$

Strassen の定理の応用例をいくつかあげる. 系 3.4 で $\Phi(f) := f(1)$ とおけば, 通常の Brown 運動の重複対数の法則

$$P^W[\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1] = 1$$

が得られる. 同様に, $\Phi(f) := \sup_{0 \leq s \leq 1} |f(s)|$ とおけば, Brown 運動の $\sup$ に関する重複対数の法則

$$P^W[\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{0 \leq s \leq t} |W(s)|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1] = 1$$

がわかる. 一方, Brown 運動の軌跡が平均的な挙動よりも原点の近くにあるときの偏差の度合いを見る場合は, 別のタイプの大偏差原理が必要となる. このことを述べたものが次にあげる Donsker-Varadhan の大偏差原理である.

3.2 Donsker-Varadhan の大偏差原理

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\{W(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ を 1 次元 Brown 運動として, Brown 運動の生成作用素を $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$ とする. $\mathcal{D}^+$ を $\mathcal{L}$ の domain かつ, $\inf_{x \in \mathbb{R}} u(x) > 0$ をみたす関数 u の全体とする. 空間 M を $\mu(\mathbb{R}) \leq 1$ をみたす測度 μ の全体とする. M には漠位相が入っているとする. すなわち, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上連続かつ $|x| \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow 0$ となる任意の関数としたとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mu_n(dx) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mu(dx)$$

ならば, $\mu_n \rightarrow \mu$ で定まる位相が入っているものとする.

任意の $\mu \in M$ に対して rate 関数 $I(\mu)$ を以下で定義する.

$$I(\mu) := - \inf_{u \in \mathcal{D}^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{L}u}{u} \right) (x) \mu(dx) \quad (3.7)$$

$\lambda > 0$, E を $\mathbb{R}$ 上の Borel 集合とする. Brown 運動が時刻 λ までに E に滞在している時間の割合を $L_\lambda(E)$ とする. すなわち,

$$L_\lambda(E) := \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \mathbf{1}_E(W(t)) dt$$

ここで, $\mathbf{1}_E(\cdot)$ は定義関数である. 任意の λ に対して $L_\lambda(\cdot)$ は $\mathbb{R}$ 上の確率測度になっていることに注意する. また, E が有界であれば, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき $L_\lambda(E) \rightarrow 0$ であることにも注意しておく.

さらに, $P^x(\cdot) := P(\cdot | W(0) = x)$, A を M 上の Borel 集合として, M 上の確率 $Q_{\lambda,x}(\cdot)$ を

$$Q_{\lambda,x}(A) := P^x[L_\lambda(\cdot) \in A] \quad \forall A \subset M$$

で定義する. 以下は Brown 運動の滞在時間に関する大偏差原理である (Donsker, Varadhan [6]).

定理 3.6 (Donsker-Varadhan の大偏差原理) 任意の閉集合 $F \subset M$ に対して

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log Q_{\lambda,x}(F) \leq - \inf_{\mu \in F} I(\mu) \quad (3.8)$$

任意の開集合 $O \subset M$ に対して

$$\underline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log Q_{\lambda,x}(O) \geq - \inf_{\mu \in O} I(\mu). \quad (3.9)$$

$A \subset M$ を 任意の Borel 集合とする. もし $\bar{A}$ の元として全測度が 0 であるような測度を含まないのであれば, 定義から $Q_{\lambda,x}(A)$ は $\lambda \rightarrow \infty$ のとき, 0 に収束することはすぐにわかるが, 定理 3.6 は, その収束の速さが指数関数的であることを示している.

次に Donsker-Varadhan の大偏差原理の応用を与える。パラメータ λ を $\lambda > 3$, E を $\mathbb{R}$ 上の Borel 集合として,

$$\hat{L}_\lambda(E) := \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \mathbf{1}_E \left(\sqrt{\frac{\log \log \lambda}{\lambda}} W(t) \right) dt \quad (3.10)$$

とおく。 $\hat{L}_\lambda(E)$ は Brown 運動をスケール変換したものが時刻 λ までに E に滞在している時間の割合である。Brown 運動のスケール変換による不変性より, 平均的な Brown 運動であれば, E が有界のとき, $\hat{L}_\lambda(E)$ は $\lambda \rightarrow \infty$ で $(\log \log \lambda)^{-1/2}$ のオーダーで非常にゆっくりと 0 に収束していくことがわかる。さらに C を $C := \{\mu \in M; I(\mu) \leq 1\}$ で定める。 C は M の位相でコンパクトである。このとき, 定理 3.3 に類似の以下の定理が成り立つ (Donsker, Varadhan [7]).

定理 3.7 (Donsker-Varadhan の重複対数の法則)

$$P^W \left[\overline{\bigcap_{t \geq 0} \{\hat{L}_\lambda(\cdot + x); \lambda \geq t, x \in \mathbb{R}\}} \subset C \right] = 1 \quad (3.11)$$

$$P^W \left[\bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\hat{L}_\lambda(\cdot); \lambda \geq t\}} \supset C \right] = 1. \quad (3.12)$$

ただし, 上の定理で閉包は M の位相, すなわち漠位相での閉包である。明らかに

$$\bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\hat{L}_\lambda(\cdot); \lambda \geq t\}} \subset \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\hat{L}_\lambda(\cdot + x); \lambda \geq t, x \in \mathbb{R}\}}$$

であるから, 上の定理から確率 1 で

$$\bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\hat{L}_\lambda(\cdot); \lambda \geq t\}} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\hat{L}_\lambda(\cdot + x); \lambda \geq t, x \in \mathbb{R}\}} = C$$

であると結論できる。とくに系 3.4 に類似の以下がわかる。

系 3.8 Φ を M 上の実数値関数で, M の位相で連続であるとする。このとき, 確率 1 で

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\hat{L}_\lambda(\cdot)) = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \Phi(\hat{L}_\lambda(\cdot + x)) = \sup_{\mu \in C} \Phi(\mu).$$

Donsker-Varadhan の重複対数の法則は, Brown 運動の軌跡が平均的な挙動よりも原点の近くにあるときの偏差の度合いを見ている, といえる。もし Brown 運動の軌跡が平均的な挙動であれば, $\lambda \rightarrow \infty$ としたとき $\sqrt{(\log \log \lambda)/\lambda} W(\lambda)$ は原点から遠くに非常にゆっくりと発散していくので, 式 (3.10) より任意の有界な Borel 集合 $E \in \mathbb{R}$ に対して $\hat{L}_\lambda(E)$ は 0 に非常にゆっくりと収束していく, といえる。一方, もし Brown 運動の軌跡が平均的な挙動よりも原点の近くにある場合には, λ のある部分列 $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ があって, $\sqrt{(\log \log \lambda_n)/\lambda_n} W(\lambda_n)$ が Borel 集合 E の元となるようにとれる。これは, $\hat{L}_{\lambda_n}(E)$ が必ずしも 0 ではない有限の値に収束していくことを意味する。

定理 3.7 の証明は Donsker, Varadhan ([7]) にあるので省略するが, ここでは式 (3.11) についてのみ, 証明の概要をごく簡単に述べておく。

[式 (3.11) の証明の概要] まず, 任意の $\mu(\cdot) \in M$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\mu(\cdot - x) \in M$ であることに注意する. 任意の Borel 集合 $A \subset M$ に対して $D_A := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{\mu(\cdot - x) \in M; \mu(\cdot) \in A\}$ とおく. 式 (3.8) を使えば以下の命題が成り立つことがわかる.

命題 3.9 $F \subset M$ を閉集合とする. このとき,

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log Q_{\lambda,0}(D_F) \leq - \inf_{\mu \in F} I(\mu).$$

$C := \{\mu \in M; I(\mu) \leq 1\}$ とする. G, N を C の M での近傍で $C \subset N \subset \bar{N} \subset G$ をみたすものとする. N の補集合を N^c として, $\theta := \inf_{\mu \in N^c} I(\mu)$ とおく. このとき, I が下半連続であることから $\theta > 1$ である. $\theta' = (1 + \theta)/2$ とおく. k を $0 < k < 1$ かつ $k\theta' > 1$ をみたすように選び, $\lambda_n := \exp(n^k)$ とおく.

式 (3.11) を示すには, 確率 1 で十分大きな $\lambda' > 0$ があって 任意の $\lambda > \lambda'$ に対して $\hat{L}_\lambda(\cdot) \notin D_{G^c}$ を示せばよいが, じつは, 確率 1 で十分大きな $N \in \mathbb{N}$ があって 任意の $n > N$ に対して $\hat{L}_{\lambda_n}(\cdot) \notin D_{N^c}$ を示すだけで十分である. Brown 運動のスケール変換による不変性を使えば,

$$P^0[\hat{L}_\lambda(\cdot) \in D_{N^c}] = P^0[L_{\log \log \lambda}(\cdot) \in D_{N^c}] = Q_{\log \log \lambda, 0}(D_{N^c}). \quad (3.13)$$

一方, 定理 3.9 より, 十分大きな $\lambda > 0$ に対して,

$$Q_{\log \log \lambda, 0}(D_{N^c}) \leq \exp\{-(\log \log \lambda)\theta'\}. \quad (3.14)$$

式 (3.13) および (3.14) より, 十分大きな n に対して

$$P^0[\hat{L}_{\lambda_n}(\cdot) \in D_{N^c}] \leq \exp\{-(\log \log \lambda_n)\theta'\} = n^{-k\theta'}.$$

ここで, k は $k\theta' > 1$ となるように選べるので, Borel-Cantelli の補題が使えて式 (3.11) が証明できた. $\square$

今までは, M の位相, すなわち漠位相の中で議論をしていたが, もっと強い位相でも同様の結果が成り立つ. 空間 $\mathcal{A}$ を以下で定める. ただし, $\mathcal{A}$ には広義一様収束位相が入っているものとする.

$$\mathcal{A} := \left\{ f \geq 0; \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \leq 1, f \text{ は } (-\infty, \infty) \text{ で一様連続} \right\}$$

$f \in \mathcal{A}$ に対して, rate 関数 $I : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ を以下で定める.

$$I(f) := - \inf_{u \in \mathcal{D}^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{L}u}{u} \right) (x) f(x) dx \quad (3.15)$$

密度関数 $f \in \mathcal{A}$ の分布を $\mu \in M$ とおく. すなわち, E を $\mathbb{R}$ 上の任意の Borel 集合として $\mu(E) := \int_E f(x)dx$ とする. このとき, 式 (3.15) で定義した $I(f)$ は式 (3.7) で定義した $I(\mu)$ にほかならない.

$\hat{I}_\lambda(\cdot) \in \mathcal{A}$ をパラメータ λ ($\lambda > 3$) の過程として以下で定める.

$$\hat{I}_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{\log \log \lambda}} l \left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{\log \log \lambda}} x \right)$$

で定義する. これは, 式 (3.10) で定義した $\hat{L}_\lambda(\cdot)$ の密度関数

$$\hat{L}_\lambda(E) = \int_E \hat{l}_\lambda(x) dx \quad E \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上の Borel 集合}$$

にほかならない. さらに $\mathcal{A}$ 上のコンパクト集合 $\hat{C}$ を $\hat{C} := \{f \in \mathcal{A}; I(f) \leq 1\}$ で定義する. このとき, 弱位相の場合と同様に, 定理 3.7 と類似の以下の定理が成り立つ.

定理 3.10 (Donsker-Varadhan の重複対数の法則)

$$P^W \left[\bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\hat{l}_\lambda(\cdot); \lambda \geq t\}} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\hat{l}_\lambda(\cdot + x); x \in \mathbb{R}, \lambda \geq t\}} = \hat{C} \right] = 1. \quad (3.16)$$

ただし, 定理 3.10 の閉包は, $\mathcal{A}$ の位相での閉包である. さらに, 以下の系がしたがう.

系 3.11 Φ を $\mathcal{A}$ 上の実数値関数で, $\mathcal{A}$ の位相で連続であるとする. このとき, 確率 1 で

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \Phi(\hat{l}_\lambda(\cdot + x)) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \Phi(\hat{l}_\lambda(\cdot)) = \sup_{f \in \hat{C}} \Phi(f).$$

先に rate 関数は, 式 (3.15) で定義されているが, このままでは応用上使いにくい. じつは以下の命題が成り立つことが知られている ([5]).

命題 3.12 $-\infty \leq a < b \leq \infty$ とする. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f が以下の 3 条件

$$(1) \ f > 0 \text{ on } (a, b), \quad (2) \ f = 0 \text{ on } [a, b]^c, \quad (3) \ f \in C^1(\mathbb{R})$$

を満たすものとする. さらに $I(f)$ は式 (3.15) で定義されるものとする. このとき以下の等式が成り立つ.

$$I(f) = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'(y)]^2}{f(y)} dy \quad (3.17)$$

ここで, 式 (3.17) は左辺または右辺が存在して有限のとき, 右辺または左辺も存在して等式がなりたつ, という意味である.

Donsker-Varadhan の定理の応用例をいくつか述べる. Brown 運動の原点での local time についての重複対数の法則を調べることを考える. 原点での local time が平均的な挙動よりも大きい場合というのは, 逆に Brown 運動がいつもより原点近くに滞在していると考えられるから, その場合は Strassen type の重複対数ではなく, Donsker-Varadhan type の重複対数を使うことになる. ここで 2 つの例を見ていく. 以下は, Donsker-Varadhan の論文 [7] で証明なしで主張されているので, ここで証明をつけていくことにする.

例 1 $l(t, x)$ を Brown 運動の local time とする. このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(t, 0)}{\sqrt{2t \log \log t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad a.s. \quad (3.18)$$

[証明] Donsker-Varadhan の定理 (系 3.11) で $\Phi(f) = f(0)$ とおく. このとき,

$$\Phi(\hat{l}_t(\cdot)) = \frac{l(t, 0)}{\sqrt{t \log \log t}}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \Phi(\hat{l}_t(\cdot + x)) = \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x)}{\sqrt{t \log \log t}}$$

より $\sup_{f \in \hat{C}} \Phi(f) = \sqrt{2}$ を示せばよい. まず, $f(x) = \sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}|x|}$ とおくと, $f \in \hat{C}$ で $\Phi(f) = \sqrt{2}$ をみたす. 次に, $C(\mathbb{R})$ 上の Hilbert 空間 H を式 (3.3) で定義する. さらに, $f \in L^2(\mathbb{R})$ のとき, f の L^2 ノルムを $\|f\|_2$ と書くことにする. 任意の $f \in \hat{C}$ に対して $f \geq 0$ より, $g = \sqrt{f}$ とおくと $g \in H$ である. すると,

$$1 \geq I(f) = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'(x)]^2}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [g'(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \|g'\|_2^2$$

がわかるので, 示すことは

$$\mathcal{H} := \left\{ g \in H; \|g\|_2 = 1, \|g'\|_2 = \sqrt{2} \right\}$$

としたとき, 任意の $g \in \mathcal{H}$ に対して $g(0) \leq 2^{\frac{1}{4}}$ である. g のフーリエ変換

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g(x) dx$$

を考える. このとき, フーリエ変換の性質から $\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2$ である. さらに, $\hat{g}'(t) = -it\hat{g}(t)$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\hat{g}(t)|^2 dt = \|\hat{g}'\|_2^2 = \|g'\|_2^2$$

である. ここで, $g \in \mathcal{H}$ であれば左辺の積分は収束するから, $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ となり, $g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t) dt$ である. したがって, $a > 0$ に対して Schwarz の不等式から

$$\begin{aligned} |g(0)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{a^2 + t^2}} \sqrt{\frac{a^2 + t^2}{a}} \hat{g}(t) dt \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + t^2} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 + t^2}{a} |\hat{g}(t)|^2 dt \right) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right) \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

となり, $\Phi(f) = f(0) = |g(0)|^2 \leq \sqrt{2}$ となって示された. $\square$

例 2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} l(t, 0) = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad a.s. \quad (3.19)$$

これは前にも触れたように, 以下の例 2” を示すことと同値である. Donsker-Varadhan の重複対数の法則を用いて 例 2” を示していく.

例 2 ”

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |W(s)| = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad a.s. \quad (3.20)$$

[例 2 ” の証明] まず, $f \in \hat{C}$ のもとで,

$$\inf \left\{ r > 0; \int_{-r}^r f(x) dx = 1 \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad (3.21)$$

であることを示す. 例 1 と同様に, $g = \sqrt{f}$ において, 任意の $g \in \mathcal{H}$ に対して

$$\inf \left\{ r > 0; \int_{-r}^r |g(x)|^2 dx = 1 \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad (3.22)$$

を示せばよい. 式 (3.22) を示すために, g をフーリエ級数展開する.

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{2R} + b_n \sin \frac{n\pi t}{2R} \right)$$

とすると, $g \in \mathcal{H}$ のとき, $\int_{-R}^R |g(t)|^2 dt = 1$, $\int_{-R}^R |g'(t)|^2 dt = 2$ であることから,

$$\frac{a_0^2 R}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) R = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{4R} (a_n^2 + b_n^2) = 2$$

よって, $\left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right\} = \frac{8}{\pi^2}$ のもとで, $R = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$ の最小値を求めればよい. これは, Lagrange の方法より簡単に $R = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$ とわかるから, これで式 (3.21) は示された.

式 (3.20) を示すために, 任意の $r > 0$ に対して $\Phi_r(f) := \int_{-r}^r f(y) dy$ と定義する.

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \Phi_r(\hat{l}_t(\cdot)) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{1}{t} \rho_t l(t, \rho_t y) dy \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-\rho_t r}^{\rho_t r} l(t, y) dy \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{meas} \{0 \leq s \leq t; |W(s)| \leq \rho_t r\} \end{aligned}$$

である. ただし, $\rho_t := \sqrt{t / \log \log t}$ とおいた.

$$\sup_{f \in \hat{C}} \Phi_r(f) = \sup_{f \in \hat{C}} \int_{-r}^r f(y) dy =: k_r$$

とおく. 式 (3.21) より, k_r の値は具体的に $r < \pi / \sqrt{8}$ のときは $k_r < 1$, $r \geq \pi / \sqrt{8}$ のときは $k_r = 1$ となることからわかる. Donsker-Varadhan の定理を使えば, 確率 1 で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{meas} \{0 \leq s \leq t; |x(s)| \leq \rho_t r\} = 1 \quad \text{if } r \geq \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad (3.23)$$

$$< 1 \quad \text{if } r < \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad (3.24)$$

である. 式 (3.24) より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\log \log t}{t}} \sup_{0 \leq s \leq t} |W(s)| \geq \frac{\pi}{\sqrt{8}} \quad a.s.$$

がいえる. 逆の不等式を示すために以下の定理を使う (Donsker Varadhan [7]).

定理 3.13 μ を $I(\mu) < 1$ かつ, *support* が開区間 $(-r, r)$ の内部であるような確率分布とする. $r' > r$ として, G を μ の M の位相での近傍とする. *stopping time* $\tau_{(a,b)}$ を Brown 運動が開区間 (a, b) を離れる最初の時刻と定めて, 事象 E_t を $E_t := \{\omega; \hat{L}_t(\cdot) \in G, \tau_{(-r'\rho_t, r'\rho_t)} > t\}$ として定義する. このとき, 確率 1 で $t_1 < t_2 < \dots, t_n \rightarrow \infty$ なる列が存在して, 任意の $s > 0$ に対して, $\omega \in E_{t_n}$ をみたすような $t_n > s$ がとれる.

この定理は Donsker-Varadhan の定理 3.7 を示す途中の過程で出てくるものであり, ここでは証明を省略する. これと式 (3.23) を使えば,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \tau > 0 \text{ に対して } \exists t_0 > \tau \text{ s.t. } \sup_{0 \leq s \leq t_0} |W(s)| \leq \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} + \varepsilon\right) \sqrt{\frac{t_0}{\log \log t_0}} \quad a.s.$$

がわかるので, 例 2” の式 (3.20) が示された. これより 例 2 の式 (3.19) も自動的に従う. $\square$

例 1 の式 (3.18) および例 2 の式 (3.19) より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して t が十分大きいとき

$$\sqrt{t} (\log t)^{-\varepsilon} \leq l(t, 0) \leq \sqrt{t} (\log t)^{\varepsilon} \quad a.s. \quad (3.25)$$

がわかる. これより以下の 2 つの命題が成り立つ.

命題 3.14 τ_r を原点での *inverse local time* とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau_r}{r^2 (\log r)^{\varepsilon}} = 0 \quad a.s. \quad (3.26)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau_r}{r^2 (\log r)^{-\varepsilon}} = \infty \quad a.s. \quad (3.27)$$

[証明] $\varepsilon < 1$ としてよい. まず 式 (3.26) を示す. 式 (3.25) より r が十分大きいとき,

$$r = l(\tau_r, 0) \geq \tau_r^{1/2} (\log \tau_r)^{-\varepsilon} \geq \tau_r^{1/3} \quad a.s.$$

より, $\tau_r \leq r^3$ である. さらに 式 (3.25) をもう一度使えば,

$$r \geq 3 \tau_r^{1/2} (\log \tau_r)^{-\varepsilon} \geq 3 \tau_r^{1/2} (3 \log r)^{-\varepsilon} \geq \tau_r^{1/2} (\log r)^{-\varepsilon} \quad a.s.$$

となり, 式 (3.26) が証明された. 次に, 式 (3.27) を示す. 式 (3.25) より, r が十分大きいとき, $r^2 = [l(\tau_r, 0)]^2 \leq \tau_r (\log \tau_r)^{2\varepsilon} \quad a.s.$ であるが, ここで式 (3.26) を使えば, $\tau_r \leq r^2 (\log r)^{\varepsilon}$ より,

$$(\log \tau_r)^{2\varepsilon} = [2 \log r + \varepsilon \log \log r]^{2\varepsilon} \leq 9 (\log r)^{2\varepsilon} \quad a.s.$$

よって $\frac{\tau_r}{r^2 (\log r)^{-2\varepsilon}} \geq \frac{1}{9} \quad a.s.$ がわかり, $\varepsilon > 0$ は任意であるから, 式 (3.27) が証明された. $\square$

4 Favorite site

この章では, Brown 運動およびランダムウォークの favorite site について議論を行なう.

4.1 Brown 運動の favorite site

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\{W(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ を 1 次元 Brown 運動, $l(t, x)$ を Brown 運動の local time とする. $t \geq 0$ に対して, Brown 運動の favorite site の集合 $\mathbb{V}(t)$ を

$$\mathbb{V}(t) := \{x \in \mathbb{R}; l(t, x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} l(t, y)\}$$

で定義する. $\mathbb{V}(t)$ は Brown 運動の local time が最大となるような場所の全体である. このとき Brown 運動の性質から, 確率 1 で時刻 t に対して, $\#\mathbb{V}(t) = 1$ or 2 であることに注意しておく. $\mathbb{V}(t)$ の元, すなわち favorite site のうち絶対値が最小のものを $\underline{V}(t)$, 絶対値が最大のものを $\bar{V}(t)$ とおく. Bass, Griffin は Brown 運動の favorite site についての研究を行い, 次の結果を得た (Bass, Griffin [1]).

定理 4.1 (Bass, Griffin [1]) 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\bar{V}(t)|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1. \quad (4.1)$$

定理 4.2 (Bass, Griffin [1]) 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\underline{V}(t)|}{\sqrt{t}(\log t)^{-\gamma}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \gamma < 1 \\ \infty & \text{if } \gamma > 11. \end{cases} \quad (4.2)$$

その後, Lifshits, Shi [11] は定理 4.2 で $\gamma = 1$ の場合も $\liminf$ が 0 となることを示した. すなわち,

定理 4.3 (Lifshits, Shi [11]) 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\underline{V}(t)|}{\sqrt{t}(\log t)^{-1}} = 0. \quad (4.3)$$

さらに, [11] では定理 4.2 の $\gamma > 11$ を $\gamma > 1$ とした場合でも $\liminf$ が ∞ となると書かれているが, その証明には誤りがあることを著者は指摘した. そのため, $1 < \gamma \leq 11$ についてが当面の問題となったが, 著者は定理 4.2 で $\gamma > 10$ のときの改良に成功した. すなわち,

定理 4.4 $\gamma > 10$ のとき, 確率 1 で以下がなりたつ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\underline{V}(t)|}{\sqrt{t}(\log t)^{-\gamma}} = \infty. \quad (4.4)$$

以下, これらの定理を証明していく. ここでキーポイントとなるのが, 前にあげた Ray-Knight の定理である.

定理 4.5 (Ray-Knight の定理) 過程 $\{l(\tau_r, x)\}_{x \geq 0}$ と $\{l(\tau_r, x)\}_{x \leq 0}$ は互いに独立で, r から出発する 0 次元 squared Bessel 過程である.

注意 $\{l(\tau_r, x)\}_{x \geq 0}$ と $\{l(\tau_r, x)\}_{x \leq 0}$ との独立性については, ここでは証明はしない.

定理 4.1 を大偏差原理の立場で見してみる. 今の場合 Brown 運動の favorite site が平均的な挙動よりも原点から遠くにあるときの偏差の度合いを見ている. このとき, Brown 運動の原点における local time は平均的な挙動よりも小さくしなければならない. よって Brown 運動そのものの軌跡は平均的な挙動よりも原点から遠くにあるときの偏差の度合いを見ることになるので, Schilder の大偏差原理の立場で見ることとなる. まず, Brown 運動の重複対数の法則より,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|\bar{V}(t)|}{\sqrt{2t \log \log t}} \leq 1$$

は明らかである. 逆の不等式を見るために, $0 < \varepsilon < 1$ を任意にとり, $f \in C_0[0, 1]$ を以下で定める.

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{if } 0 \leq t \leq 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & \text{if } 1 - \varepsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$$

このとき, $f \in K$ であり, 定理 3.3 から f は, 確率 1 で ξ^λ の極限点になっている. すなわち, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$ があって, 各 λ_n は近似的に,

$$\frac{W(\lambda_n t)}{\sqrt{2\lambda_n \log \log \lambda_n}} \sim f(t)$$

である. このとき $0 \leq t \leq 1 - \varepsilon$ に対して (すなわち, Brown 運動の時刻 0 から $(1 - \varepsilon)\lambda_n$ までの挙動に対して) は, Brown 運動は一定のスピードで遠ざかっていく. また, $1 - \varepsilon \leq t \leq 1$ に対して (すなわち, Brown 運動の時刻 $(1 - \varepsilon)\lambda_n$ から λ_n までの挙動に対して) は, $W(t)$ は一定値 $(1 - \varepsilon)\sqrt{2\lambda_n \log \log \lambda_n}$ をとる. したがって, $0 \leq t \leq 1$ に対して (すなわち, Brown 運動の時刻 0 から λ_n までの挙動に対して) 考えると, 滞在時間が一番長い場所 $(1 - \varepsilon)\sqrt{2\lambda_n \log \log \lambda_n}$ が favorite site $\bar{V}(\lambda_n)$ になると考えられるので, 式 (4.1) は容易に予想がつく. 実際の証明は多少テクニカルであり, ここでは証明しない.

次に定理 4.4 を証明する. 証明の方針は, Bass, Griffin [1] の定理 4.2 のときとほぼ同様である. まず $\underline{V}(t)$ のかわりに $\underline{V}(\tau_r)$ の漸近的な評価をおこなう. ただし τ_r は, 式 (2.2) で定義した inverse local time である. この場合, $\gamma > 10$ であれば

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\underline{V}(\tau_r)|}{r(\log r)^{-\gamma}} = \infty \quad a.s. \quad (4.5)$$

が成り立つが, これを示すには Ray-Knight の定理を使う. 定理 4.5 より, r から出発する独立な 0 次元 squared Bessel 過程 $\{l(\tau_r, x)\}_{x \geq 0}$ および $\{l(\tau_r, x)\}_{x \leq 0}$ が最大となるような場所 x の中で原点に最も近いものが favorite site $\underline{V}(\tau_r)$ であるから, $r \rightarrow \infty$ としたときに $|\underline{V}(\tau_r)|$ がどのように遠くにいくかを調べればよいことになる.

式 (4.5) がわかれば, 定理 4.4 はそれを少し修正することによって得られる. Bass, Griffin [1] は, Fristedt [9] の結果

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau_r}{r^2(\log r)^{2+\varepsilon}} = 0 \quad a.s. \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (4.6)$$

を用いて, 定理 4.2 を証明したが, かわりに命題 3.14 を使うことで, じつは $\gamma > 10$ でも favorite site の $\liminf$ が ∞ となることが示される.

Ray-Knight の定理を使うことで, 0 次元 squared Bessel 過程を評価することになるが, 以下の Williams の分解定理を使えば, 0 次元のかわりに 4 次元 squared Bessel 過程を評価すればよいことになる (Williams [15]).

定理 4.6 (Williams の分解定理) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上に, 以下の独立な確率過程 $Y(t)$, $Z^m(t)$ および確率変数 M を考える.

- (1) $Y(t)$ は 1 から出発する 4 次元 squared Bessel 過程である.
- (2) M は $Q(M > m) = 1/m$ for $m \geq 1$ を分布とする確率変数である.
- (3) 任意の $m \geq 1$ に対して $[0, m]$ 上の拡散過程 $Z^m(t)$ は以下の確率微分方程式をみたす.

$$Z^m(t) = m - 4 \int_0^t \frac{Z^m(s)}{m - Z^m(s)} ds + 2 \int_0^t \sqrt{Z^m(s)} dW(s)$$

このとき, stopping time ρ および確率過程 $X(t)$ を $\rho := \inf\{t \geq 0; Y(t) = M\}$,

$$X(t) := \begin{cases} Y(t) & \text{if } t \geq \rho \\ Z^M(t - \rho) & \text{if } t \leq \rho \end{cases}$$

で定義したとき, $X(t)$ は 1 から出発する 0 次元 squared Bessel 過程である.

定理 4.4 の証明を続ける. まず, 4 次元 squared Bessel 過程の評価から始める.

補題 4.7 ([1]) $Y(t)$ を 1 から出発する 4 次元 squared Bessel 過程とする. このとき任意の $m > 1$, $u > 0$ に対して以下をみたす.

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq u} Y(t) < m\right] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi u}}(m - 1)$$

[証明] $X(t)$ を 1 から出発する 4 次元 Bessel 過程とする. このとき, $Y(t) = X^2(t)$ であって, $X(t)$ は以下の確率積分方程式をみたす.

$$X(t) = 1 + W(t) + \int_0^t \frac{3}{2X(s)} ds$$

任意の t に対して $X(t) > 0$ より $X(t) \geq 1 + W(t)$ であるから,

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{0 \leq t \leq u} Y(t) < m\right] &\leq P\left[\sup_{0 \leq t \leq u} W(t) < \sqrt{m} - 1\right] \\ &\leq P\left[\sup_{0 \leq t \leq u} W(t) < m - 1\right] \end{aligned}$$

ここで Brown 運動の反射原理とスケール変換による不変性を使えば

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{0 \leq t \leq u} W(t) < m - 1\right] &= P[|W(u)| < m - 1] \\ &= P\left[|W(1)| < \frac{1}{\sqrt{u}}(m - 1)\right] \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi u}}(m - 1). \quad \square \end{aligned}$$

補題 4.8 ([1]) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある定数 $c > 0$ が存在して以下を満たす. 任意の十分小さな $\lambda > 0$ に対して

$$P \left[\inf_{1 \leq r \leq 2} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda \right] \leq c \lambda^{\frac{1}{5} - \varepsilon}. \quad (4.7)$$

注意 式 (4.7) の右辺の λ の指数が $\frac{1}{5} - \varepsilon$ となっているのが critical point であり, この証明では 定理 4.4 で $\gamma > 10$ がギリギリの評価となっている理由である.

[証明] 任意の n に対して, 補題 2.1 (2) を使えば

$$\begin{aligned} P \left[\inf_{1 \leq r \leq 2} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda \right] &\leq \sum_{k=0}^{n-1} P \left[\inf_{1 + \frac{k}{n} \leq r \leq 1 + \frac{k+1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n+k}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \frac{\lambda n}{n+k} \right] \\ &\leq n P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda \right] \end{aligned}$$

である. 次に任意の $y > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda \right] \\ &\leq P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda, \sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_1, x) - 1 > 2\lambda, |\underline{V}(\tau_1)| < y \right] \\ &+ P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda, |\underline{V}(\tau_1)| > y \right] + P \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_1, x) < 1 + 2\lambda \right] \\ &=: I + II + III \end{aligned}$$

と 3 つに分けて, それぞれを評価する. Brown 運動の対称性より,

$$I = 2 \int_0^y P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda, \sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_1, x) - 1 > 2\lambda \mid \underline{V}(\tau_1) = z \right] P[\underline{V}(\tau_1) \in dz]$$

であるが, favorite site の定義より $0 \leq z \leq y$ のとき,

$$\begin{aligned} &P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda, \sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_1, x) - 1 > 2\lambda \mid \underline{V}(\tau_1) = z \right] \\ &= P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda, l(\tau_1, z) - 1 > 2\lambda \mid \underline{V}(\tau_1) = z \right] \\ &\leq P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} (l(\tau_r, z) - r) < \lambda, l(\tau_1, z) - 1 > 2\lambda \mid \underline{V}(\tau_1) = z \right] \\ &\leq P \left[\inf_{0 \leq r \leq \frac{1}{n}} (l(\tau_r, z) - r) < -\lambda \right]. \end{aligned}$$

最後の不等式は, $\{l(\tau_r, z) - r\}_{r \geq 0}$ の定常性および独立増分性からわかる. λ は $n\lambda < 2$ をみたすとしてよい. 補題 2.3 より, 任意の $u > 0, z \geq 0$ に対して $\{e^{u\{r-l(\tau_r, z)\}}\}_{r \geq 0}$ は劣マルチンゲールであることから, $u := n\lambda/(4z)$ において Doob の不等式, および 補題 2.4 を使えば

$$\begin{aligned}
P \left[\inf_{0 \leq r \leq \frac{1}{n}} (l(\tau_r, z) - r) < -\lambda \right] &= P \left[\sup_{0 \leq r \leq \frac{1}{n}} (r - l(\tau_r, z)) > \lambda \right] \\
&= P \left[\sup_{0 \leq r \leq \frac{1}{n}} e^{u\{r-l(\tau_r, z)\}} > e^{u\lambda} \right] \\
&\leq e^{-u\lambda} E \left[\exp \left(\frac{u}{n} - u l(\tau_{\frac{1}{n}}, z) \right) \right] \\
&= \exp \left(-u\lambda + \frac{u}{n} - \frac{u}{n(1+2uz)} \right) \\
&\leq e^{-n\lambda^2/(8z)}
\end{aligned}$$

であるから,

$$I \leq 2 \int_0^y e^{-n\lambda^2/(8z)} P[V(\tau_1) \in dz] \leq 2e^{-n\lambda^2/(8y)}.$$

次に II を評価する. λ は $n\lambda < 2$ をみたすとしてよい. このとき,

$$\begin{aligned}
II &= P \left[\inf_{1 \leq r \leq 1 + \frac{1}{n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda, |V(\tau_1)| > y \right] \\
&\leq P \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_1, x) - 1 < 2/n, |V(\tau_1)| > y \right] \\
&\leq P \left[\sup_{x \geq 0} l(\tau_1, x) - 1 < 2/n, V_+(\tau_1) > y \right].
\end{aligned}$$

ただし, $V_+(t) := \inf\{x \geq 0; l(t, x) = \sup_{y \geq 0} l(t, y)\}$ とする. ここで, Ray-Knight の定理 および Williams の分解定理を使えば, 確率 P のもとでの確率変数 $V_+(\tau_1)$ および $\sup_{x \geq 0} l(\tau_1, x)$ はそれぞれ確率 Q のもとでの確率変数 ρ および M に分布として一致する. ここで Q, ρ, M は定理 4.6 で出てきた確率測度および確率変数である. これより,

$$II \leq Q[M - 1 < 2/n, \rho > y]$$

がわかる. さらに 補題 4.7 より, $Y(t)$ を 1 から出発する 4 次元 squared Bessel 過程としたとき, ある定数 c があって

$$\begin{aligned}
II &\leq Q[1 < M < 1 + 2/n, \rho > y] \\
&= \int_1^{1+2/n} Q[\inf\{t \geq 0; Y(t) = m\} > y | M = m] Q(M \in dm) \\
&= \int_1^{1+2/n} Q[\sup_{0 \leq z \leq y} Y(z) < m | M = m] Q(M \in dm) \\
&= \int_1^{1+2/n} Q[\sup_{0 \leq z \leq y} Y(z) < m] m^{-2} dm \\
&\leq c y^{-1/2} \int_1^{1+2/n} (m-1) m^{-2} dm \leq c y^{-1/2} n^{-2}.
\end{aligned}$$

よって $II \leq c y^{-1/2} n^{-2}$ がわかった.

最後に III を評価する. $Z(t)$, $\tilde{Z}(t)$ を互いに独立かつ, 1 から出発する 0 次元 squared Bessel 過程とすれば,

$$III = P \left[\left\{ \sup_{t \geq 0} Z(t) \vee \sup_{t \geq 0} \tilde{Z}(t) \right\} < 1 + 2\lambda \right] \leq P \left[\sup_{t \geq 0} Z(t) < 1 + 2\lambda \right]$$

である. $Z(t)$ の性質について調べるために r への first hitting time σ_r を

$$\sigma_r := \inf\{t \leq 0; Z(t) = r\} \quad r \geq 0 \quad (4.8)$$

で定義する. 一方, Z は確率微分方程式 $dZ(t) = 2\sqrt{Z(t)} dW(t)$ をみたす拡散過程である. この scale function は, $s(x) = x$ すなわち natural scale である. $a < x < b$ のとき, $P^x[\sigma_a < \sigma_b]$ の値は scale function を用いて $P^x[\sigma_a < \sigma_b] = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}$ となる. 0 が trap であることを使えば,

$$P \left[\sup_{t \geq 0} Z(t) < 1 + 2\lambda \right] = \frac{s(1 + 2\lambda) - s(1)}{s(1 + 2\lambda) - s(0)} = \frac{2\lambda}{1 + 2\lambda} \leq 2\lambda$$

となり $III \leq 2\lambda$ がわかる. $I \sim III$ を使えば, 結局

$$P \left[\inf_{1 \leq r \leq 2} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < \lambda \right] \leq 2n \exp \left(\frac{-n\lambda^2}{8y} \right) + \frac{c}{n\sqrt{y}} + 2n\lambda$$

となり, $y = \lambda^{(6/5)+4\varepsilon}$, $n = \lambda^{-(4/5)-\varepsilon}$ とおけば求める式が得られる. $\square$

以下の命題は, 補題 4.8 および Borel-Cantelli の補題より導かれる.

命題 4.9 ([1]) 任意の $\beta > 5$ に対して,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r}{r(\log r)^{-\beta}} = \infty \quad a.s.$$

[証明] $\beta > 5$ に対して, $5 < \delta < \beta$ をとって固定する. スケール変換による不変性および前の補題より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, n が十分大きいとき,

$$\begin{aligned} & P \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r < r(\log r)^{-\delta} \text{ for some } r \in [2^n, 2^{n+1}] \right] \\ & \leq P \left[\inf_{2^n \leq r \leq 2^{n+1}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < 2^{n+1}(\log 2^{n+1})^{-\delta} \right] \\ & = P \left[\inf_{1 \leq r \leq 2} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - r \right) < 2(\log 2^{r+1})^{-\delta} \right] \leq c n^{-\delta(\frac{1}{5}-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon > 0$ が十分小さければ, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta(\frac{1}{5}-\varepsilon)} < \infty$ なので, Borel-Cantelli の補題が使えてこれより命題が成り立つ. $\square$

一方, 補題 4.8 および命題 4.9 の証明と同様の手法を使えば以下がわかる.

命題 4.10 ([1]) 任意の $\alpha > 5$ に対して,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\sup_{|x| \leq r(\log r)^{-2\alpha}} l(\tau_r, x) - r}{r(\log \log r)^{1/2}(\log r)^{-\alpha}} < \infty \quad a.s.$$

命題 4.9 は, 時刻 τ_r における local time の $x \in \mathbb{R}$ での最大値についての評価である. 一方, 命題 4.10 は, 時刻 τ_r における local time の $|x| < r(\log r)^{-2\alpha}$ での最大値についての評価である. $5 < \beta < \alpha$ として, 2つの命題を比べると, r が十分大きければ $|x| < r(\log r)^{-2\alpha}$ での local time の最大値より, $x \in \mathbb{R}$ での local time の最大値のほうが真に大きいことがわかる. これより, 時刻 τ_r での favorite site は, 確率 1 で $|x| < r(\log r)^{-2\alpha}$ の外側にあることがわかる. よって式 (4.5) が成り立つことがわかる.

定理 4.4 についても, 命題 4.9 および命題 4.10 から得られる. まず, 命題 4.9 より, r が十分大きければ, $\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) \geq r + 2r(\log r)^{-\beta}$ であるが, $s \uparrow t$ のときに, $\tau_s \uparrow \tau_{t-}$ であるから $\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_s, x) \uparrow \sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_{t-}, x)$ となる. よって,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_{t-}, x) \geq r + 2r(\log r)^{-\beta}$$

がわかる. t を任意にとって固定する. このとき, r として $\tau_{t-} \leq t \leq \tau_t$ をみたすようにとれるので, t が十分大きいとき,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_{t-}, x) \geq r + 2r(\log r)^{-\beta}$$

となる. 一方, 命題 4.10 より r が十分大きければ

$$\sup_{|x| \leq r(\log r)^{-2\alpha}} l(\tau_r, x) \leq r + r(\log \log r)^{1/2}(\log r)^{-\alpha}$$

さて $k(t) := t^{1/2}(\log t)^{-(2\alpha+\varepsilon)}$ とおけば, 命題 3.14 より $k(\tau_r) \leq r(\log r)^{-2\alpha}$ がわかるから,

$$\sup_{|x| \leq k(t)} l(t, x) \leq \sup_{|x| \leq k(\tau_r)} l(\tau_r, x) \leq r + r(\log \log r)^{1/2}(\log r)^{-\alpha}$$

ここで, $5 < \beta < \alpha$ より r が十分大きければ, $(\log \log r)^{1/2}(\log r)^{-\alpha} < (\log r)^{-\beta}$ であることから, t が十分大きければ,

$$\sup_{|x| \leq k(t)} l(t, x) < \sup_{|x| \leq k(t)} l(t, x) + r(\log r)^{-\beta} \leq \sup_{|x| \in \mathbb{R}} l(t, x) \quad (4.9)$$

となり, $|V(t)| \geq t^{1/2}(\log t)^{-(2\alpha+\varepsilon)}$ がわかった. $\varepsilon > 0$ は任意なのでこれで証明された. $\square$

注意 上の証明で, $k(t)$ は $k(\tau_r) \leq r(\log r)^{-2\alpha}$ をみたすものであれば何でもよい. Bass, Griffin の論文では, $k(t) := t^{1/2}(\log t)^{-(2\alpha+1+\varepsilon)}$ となっていた. これは, 命題 3.14 を使わずに式 (4.6) を使っていたからである.

次に定理 4.3 の証明であるが, その前に以下の補題を示す.

補題 4.11 $R > 0$, $0 < a \leq 1$ としたとき

$$P \left[\sup_{|x| \leq a\sqrt{\tau_R}} l(\tau_R, x) > \sup_{|y| > a\sqrt{\tau_R}} l(\tau_R, y) + \sqrt{a} R \right] \geq c_1 a \quad (4.10)$$

ここで $c_1 > 0$ は R および a によらない正定数である.

[証明] スケール変換による不変性より,

$$\begin{aligned}
P & \left[\sup_{|x| \leq a\sqrt{\tau_R}} l(\tau_R, x) > \sup_{|y| > a\sqrt{\tau_R}} l(\tau_R, y) + \sqrt{a}R \right] \\
&= P \left[\sup_{|x| \leq a\sqrt{\tau_1}} \frac{1}{R} l(\tau_R, Rx) > \sup_{|y| > a\sqrt{\tau_1}} \frac{1}{R} l(\tau_R, Ry) + \sqrt{a} \right] \\
&= P \left[\sup_{|x| \leq a\sqrt{\tau_1}} l(\tau_1, x) > \sup_{|y| > a\sqrt{\tau_1}} l(\tau_1, y) + \sqrt{a} \right]
\end{aligned}$$

より, 左辺の事象は R によらないので, 上式の右辺を $p(a)$ として, $p(a)$ について議論すればよい. 示すことは, $p(a) \geq c_2 a$ $0 < \forall a \leq 1$ である. a が 0 より十分大きいところでは $p(a) > 0 \forall a > 0$ にすれば c_2 を十分小さくすることで上の不等式が成立するようにできる. よって a が 0 の近傍にある場合にだけ議論すればよい. 以下では, $0 < a < 1/17$ を仮定する. $t = \int_{-\infty}^{\infty} l(t, x) dx$ および Brown 運動の対称性より

$$\{\tau_1 \geq 1\} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} l(\tau_1, x) dx \geq 1 \right\} = \left\{ \int_0^{\infty} l(\tau_1, x) dx \geq \frac{1}{2} \right\} \supset \left\{ \inf_{1 \leq y \leq 3} l(\tau_1, y) \geq \frac{1}{2} \right\}$$

さらに, $\omega \in \{\tau_1 \geq 1\}$ のとき, $\sup_{|y| > a\sqrt{\tau_1}} l(\tau_1, y) \leq \sup_{|y| > a} l(\tau_1, y)$ であるから,

$$\begin{aligned}
p(a) &\geq P \left[\sup_{|x| \leq a\sqrt{\tau_1}} l(\tau_1, x) > \sup_{|y| > a\sqrt{\tau_1}} l(\tau_1, y) + \sqrt{a}, \tau_1 \geq 1 \right] \\
&\geq P \left[\sup_{|x| \leq a} l(\tau_1, x) > \sup_{|y| > a} l(\tau_1, y) + \sqrt{a}, \inf_{1 \leq y \leq 3} l(\tau_1, y) \geq \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

ここで右辺に対して Ray-Knight の定理を使う. $P^x(\cdot) := P(\cdot | W(0) = x)$ として, Z および $\tilde{Z}$ を独立かつ 1 から出発する 0 次元 squared Bessel 過程とすると,

$$\begin{aligned}
p(a) &\geq P^0 \left[\sup_{0 \leq x \leq a} (l(\tau_1, x) \vee l(\tau_1, -x)) > \sup_{y > a} (l(\tau_1, y) \vee l(\tau_1, -y)) + \sqrt{a}, \inf_{1 \leq y \leq 3} l(\tau_1, y) \geq \frac{1}{2} \right] \\
&= P^1 \left[\sup_{0 \leq t \leq a} (Z(t) \vee \tilde{Z}(t)) > \sup_{t > a} (Z(t) \vee \tilde{Z}(t)) + \sqrt{a}, \inf_{1 \leq t \leq 3} Z(t) \geq \frac{1}{2} \right] \\
&\geq P^1 \left[\sup_{0 \leq t \leq a} Z(t) \geq 1 + 2\sqrt{a}, 1 - \sqrt{a} \leq Z(a) \leq 1, 1 - \sqrt{a} \leq \tilde{Z}(a) \leq 1, \right. \\
&\quad \left. \sup_{t > a} Z(t) < 1 + \sqrt{a}, \inf_{1 \leq t \leq 3} Z(t) \geq \frac{1}{2}, \sup_{t \geq a} \tilde{Z}(t) < 1 + \sqrt{a} \right] \\
&\geq P^1 \left[\sup_{0 \leq t \leq a} Z(t) \geq 1 + 2\sqrt{a}, 1 - \sqrt{a} \leq Z(a) \leq 1 \right] P^1[1 - \sqrt{a} \leq \tilde{Z}(a) \leq 1] \\
&\quad \inf_{1 - \sqrt{a} \leq x \leq 1} P^x \left[\sup_{t \geq 0} Z(t) < 1 + \sqrt{a}, \inf_{1 - a \leq t \leq 3 - a} Z(t) \geq \frac{1}{2} \right] \inf_{1 - \sqrt{a} \leq x \leq 1} P^x \left[\sup_{t \geq 0} \tilde{Z}(t) < 1 + \sqrt{a} \right]
\end{aligned}$$

最後の不等式は, squared Bessel 過程のマルコフ性および Z と $\tilde{Z}$ の独立性から従う. 示すことは,

$$P^1 \left[\sup_{0 \leq t \leq a} Z(t) \geq 1 + 2\sqrt{a}, 1 - \sqrt{a} \leq Z(a) \leq 1 \right] \geq c_3 \quad (4.11)$$

$$\inf_{1 - \sqrt{a} \leq x \leq 1} P^x \left[\sup_{t \geq 0} Z(t) < 1 + \sqrt{a}, \inf_{1 - a \leq t \leq 3 - a} Z(t) \geq \frac{1}{2} \right] \geq c_4 \sqrt{a} \quad (4.12)$$

である。なぜなら、上の2つが示せれば明らかに

$$P^1 \left[1 - \sqrt{a} \leq \tilde{Z}(a) \leq 1 \right] \geq c_3, \quad \inf_{1-\sqrt{a} \leq x \leq 1} P^x \left[\sup_{t \geq 0} Z(t) < 1 + \sqrt{a} \right] \geq c_4 \sqrt{a}$$

なので、 $c_1 := (c_3 c_4)^2$ とおけば式 (4.10) が示せる。式 (4.11), (4.12) を示せばよい。マルコフ性より

$$\begin{aligned} & P^1 \left[\sup_{0 \leq t \leq a} Z(t) \geq 1 + 2\sqrt{a}, 1 - \sqrt{a} \leq Z(a) \leq 1 \right] \\ & \geq P^1 \left[1 + 2\sqrt{a} \leq Z(a/2) \leq 1 + 3\sqrt{a} \right] \inf_{1+2\sqrt{a} \leq x \leq 1+3\sqrt{a}} P^x \left[1 - \sqrt{a} \leq Z(a/2) \leq 1 \right] \end{aligned}$$

である。 Z の分布は変形された Bessel 関数を使えば

$$\begin{aligned} P^x[Z(t) \in dy] &= \frac{1}{2t} \sqrt{\frac{x}{y}} \exp\left(-\frac{x+y}{2t}\right) I_1\left(\frac{\sqrt{xy}}{t}\right) dy \quad x, y > 0 \\ P^x[Z(t) = 0] &= \exp\left(-\frac{x}{2t}\right) \quad x > 0 \end{aligned}$$

と書ける。ただし、

$$I_1(z) := \frac{z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

である。 $I_1(z)$ には次の漸近公式が知られている。

$$I_1(z) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi z}} e^z \quad (z \rightarrow \infty)$$

これを使えば $0 < a < 1/17$ に対して一様に

$$\begin{aligned} P^1[1 + 2\sqrt{a} \leq Z(a/2) \leq 1 + 3\sqrt{a}] &\geq c_5 \\ \inf_{1+2\sqrt{a} \leq x \leq 1+3\sqrt{a}} P^x[1 - \sqrt{a} \leq Z(a/2) \leq 1] &\geq c_6 \end{aligned}$$

がわかるから、これで式 (4.11) は正しいことがわかった。式 (4.12) を示すため、 r への first hitting time σ_r を式 (4.8) で定義する。 $a < 1/17$ だったから $3/4 < 1 - \sqrt{a}$ である。これより任意の $1 - \sqrt{a} \leq x \leq 1$ に対して強マルコフ性から

$$\begin{aligned} & P^x \left[\sup_{t \geq 0} Z(t) < 1 + \sqrt{a}, \inf_{1-a \leq t \leq 3-a} Z(t) \geq \frac{1}{2} \right] \\ & \geq P^x \left[\sigma_{3/4} < \sigma_{1+\sqrt{a}}, \inf_{\sigma_{3/4} \leq t \leq 3+\sigma_{3/4}} Z(t) \geq \frac{1}{2}, \sup_{t \geq \sigma_{3/4}} Z(t) \leq 1 \right] \\ & = P^x \left[\sigma_{3/4} < \sigma_{1+\sqrt{a}} \right] P^{3/4} \left[\inf_{0 \leq t \leq 3} Z(t) \geq \frac{1}{2}, \sup_{t \geq 0} Z(t) \leq 1 \right] \end{aligned}$$

である。ここで $P^{3/4} \left[\inf_{0 \leq t \leq 3} Z(t) \geq \frac{1}{2}, \sup_{t \geq 0} Z(t) \leq 1 \right] = c_7$ は正の定数である。一方、拡散過程

$Z(t)$ は natural scale であるから、 $a < x < b$ のとき、 $P^x[\sigma_a < \sigma_b] = \frac{b-x}{b-a}$ である。これより、 $1 - \sqrt{a} \leq x \leq 1$ のとき一様に

$$P^x[\sigma_{3/4} < \sigma_{1+\sqrt{a}}] \geq \frac{4}{5} \sqrt{a}$$

となる. よって $c_2 := (4/5)c_7$ とおけば式 (4.12) もわかり, これで式 (4.10) が示せた. $\square$

[定理 4.3 の証明] まず $r_k := k^{5k}$ とおく. 過程 $W^{(k)}$ を原点での inverse local time τ_r を用いて, $W^{(k)}(t) := W(t + \tau_{r_{k-1}})$ で定義する. 強マルコフ性より, 任意の $k \geq 2$ に対して $W^{(k)}$ は $\mathcal{F}_{\tau_{r_{k-1}}}$ に独立な Brown 運動である.

$W^{(k)}$ の local time を $l^{(k)}(t, x)$, 原点での inverse local time を $\tau_r^{(k)}$ とすると,

$$l^{(k)}(t, x) = l(t + \tau_{r_{k-1}}, x) - l(\tau_{r_{k-1}}, x) \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

$$\tau_r^{(k)} = \tau_{r+r_{k-1}} - \tau_{r_{k-1}} \quad r > 0 \quad (4.14)$$

がわかる. $\lambda > 0$ を固定して, $a_k := \lambda / \log r_k$, $s_k := r_k - r_{k-1}$,

$$A_k := \left\{ \sup_{|x| \leq a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l^{(k)}(\tau_{s_k}^{(k)}, x) > \sup_{|y| > a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l^{(k)}(\tau_{s_k}^{(k)}, y) + \sqrt{a_k} s_k \right\}$$

とおくと, 式 (4.13) および (4.14) より,

$$\tau_{s_k}^{(k)} = \tau_{r_k} - \tau_{r_{k-1}}, \quad l^{(k)}(\tau_{s_k}^{(k)}, x) = l(\tau_{r_k}, x) - l(\tau_{r_{k-1}}, x) \quad (4.15)$$

であるから, A_k は $\mathcal{F}_{\tau_{r_k}}$ 可測で, $\{A_k; k \geq 2\}$ は独立な事象である. 強マルコフ性, および補題 4.11 より, ある $c > 0$ があって,

$$P(A_k) = P \left[\sup_{|x| \leq a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l(\tau_{s_k}, x) > \sup_{|y| > a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l(\tau_{s_k}, y) + \sqrt{a_k} s_k \right] \geq c a_k$$

である. ここで, $\sum_k a_k = \sum_k \lambda / (5k \log k) = \infty$ であるから, Borel-Cantelli の補題および式 (4.15) より, 確率 1 で無限に多くの k があって以下をみtas.

$$\sup_{|x| \leq a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l(\tau_{r_k}, x) > \sup_{|y| > a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l(\tau_{r_k}, y) + \sqrt{a_k} s_k - \sup_{y \in \mathbb{R}} l(\tau_{r_{k-1}}, y) \quad (4.16)$$

ここで, 式 (2.3) および 命題 3.14 を使えば, 確率 1 で $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} l(\tau_{r_{k-1}}, y) \leq \tau_{r_{k-1}}^{1/2} \log \tau_{r_{k-1}} \leq r_{k-1} (\log r_{k-1})^2 = o(\sqrt{a_k} s_k) \quad (4.17)$$

となるので, 式 (4.16) の右辺の第 2 項と第 3 項は相殺できる. $\underline{V}(t)$ の定義より

$$|\underline{V}(\tau_{r_k})| \leq a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}} \leq a_k \sqrt{\tau_{r_k}}$$

がわかる. 一方, 命題 3.14 より $a_k \leq (2\lambda + o(1)) / \log \tau_{r_k}$ a.s. ($k \rightarrow \infty$) がわかるので,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\underline{V}(t)|}{\sqrt{t}(\log t)^{-1}} \leq 2\lambda \quad \text{a.s.}$$

となる. $\lambda > 0$ は任意であったから, これで証明できた. $\square$

前に, Lifshits, Shi [11] の論文で $\gamma > 1$ の場合に誤りがあると指摘したが, 以下では証明の誤りがどこなのか, なぜその誤りが本質的なのかを説明する. キーポイントとなるのが, 以下の予想である. ただし, この予想が正しいかどうかは今わからない.

予想 $0 < \rho < 1$ を任意に固定する. このとき, 任意の $R \geq 3$, $0 < a \leq (\log R)^{-1-5\rho}$ および $[1 - (\log R)^{-\rho}]R \leq r < R$ に対して

$$P \left[\sup_{|x| \leq a\sqrt{t}} l(t, x) > \sup_{|y| > a\sqrt{t}} l(t, y) - \frac{R}{(\log R)^{(1+3\rho)/2}} \text{ for some } t \in [\tau_r, \tau_R] \right] \leq \frac{c_1}{(\log R)^{1+2\rho}} \quad (4.18)$$

ここで $c_2 = c_2(\rho) > 0$ は R, r および a によらない正定数である.

もし, 上の予想が正しいとすれば, [11] より定理 4.2 の $\gamma > 11$ のところを $\gamma > 1$ に拡張することができる. しかし上の予想は, [11] で示した方法ではうまくいかないことがわかった. その理由を以下で説明する.

式 (4.18) の左辺の事象は, a について単調増加, r について単調減少なので $a = (\log R)^{-1-5\rho}$, $r = [1 - (\log R)^{-\rho}]R$ について式 (4.18) を示せば十分である. R が有界ならば十分大きな $c_1 > 0$ をとればよいので, 初めから $R \geq R_0(\rho)$ の上で考えればよい. 記号を簡単にするため,

$$\Delta := \frac{R}{(\log R)^{(1+3\rho)/2}}, \quad T := \inf \left\{ t \leq \tau_r; \sup_{|x| \leq a\sqrt{t}} l(t, x) > \sup_{|y| > a\sqrt{t}} l(t, y) - \Delta \right\} \quad (4.19)$$

とする. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ とする. このとき, 式 (4.18) は簡単に

$$P(T < \tau_R) \leq \frac{c_1}{(\log R)^{1+2\rho}}$$

と書ける. ここで論文では, $T < \infty$ のとき確率 1 で

$$|W(T)| \leq a\sqrt{T} \quad (4.20)$$

が成り立つと書いてあるが, 式 (4.20) は残念ながら成り立つとは限らない.

反例として以下のものが考えられる (図 1 を参照のこと). まず, $\tau_R < \infty$ として, 時刻 τ_r における favorite site $V(\tau_r)$ が $a\sqrt{\tau_r} < |V(\tau_r)| < a\sqrt{\tau_R}$ をみたすような状況を考える. そして τ_r から τ_R までの任意の時刻 t で, favorite site が $V(\tau_r)$ のまま変化せず, さらに $V(\tau_r)$ を除く全ての場所において $\tau_r \leq t \leq \tau_R$ なる任意の時刻 t での local time が $\sup_{x \in \mathbb{R}} l(\tau_r, x) - \Delta$ より小さくなるような状況を考える. $T_0 := (V(\tau_r)/a)^2$ とおく. このとき, $\tau_r < T_0 < \tau_R$ である. $t < T_0$ のときは,

$$\sup_{|x| \leq a\sqrt{t}} l(t, x) < \sup_{|y| > a\sqrt{t}} l(t, y) - \Delta$$

であるが, $t > T_0$ のときは, $V(\tau_r)$ は集合 $\{x \in \mathbb{R}; |x| \leq a\sqrt{t}\}$ の元となるので,

$$\sup_{|x| \leq a\sqrt{t}} l(t, x) > \sup_{|y| > a\sqrt{t}} l(t, y) - \Delta$$

図 1: 式 (4.20) に対する反例

と符号が変化することに注意する. よって, T_0 は, 式 (4.19) で定義した stopping time T そのものである. このとき, 時刻 T における Brown 運動はどこにいても構わないので,

$$P[|W(T)| > a\sqrt{T}] > 0$$

ということも十分にあり得るが, これは式 (4.20) の反例となっている.

$T < \infty$ のとき, 式 (4.20), すなわち $|W(T)| \leq a\sqrt{T}$ a.s. が誤りであると述べたが, この誤りが証明においてなぜ本質的なのかを説明する.

$M := [2(1 + 2\rho)/\rho]$ とおき, $b_0 < b_1 < \dots < b_M$ を $b_0 := aR(\log R)^{-\rho}$, $b_j := aR(\log R)^{(j+1)\rho/2}$ とする. 式 (4.20) がもし正しければ, $a\sqrt{T} \in [b_{j-1}, b_j]$ のとき

$$|W(T)| \leq b_j \text{ a.s.} \quad (4.21)$$

となるはずだが, 式 (4.21) は成り立たないことに注意する. 確率時刻 $D(T)$ を

$$D(T) := \inf\{t \geq T; W(t) = 0\}$$

とする. このとき, ある stopping time Θ があって $\tau_\Theta = D(T)$ とできる. Θ は $r \leq \Theta \leq R$ をみたすことに注意する. さらに $\omega \in \{T < \tau_R\}$ のとき, 事象 E_{j-} を以下で定義する.

$$E_{j-} := \left\{ \sup_{y \in \mathbb{R}} \{l(\tau_\Theta, y) - l(T, y)\} \leq b_j \right\} \cap \left\{ \sup_{T \leq t \leq \tau_\Theta} |W(t)| \leq 2b_j \right\}$$

このとき論文には, $\omega \in \{a\sqrt{T} \in [b_{j-1}, b_j]\}$ のとき, ある定数 $c > 0$ があって, $P[E_{j-} | \mathcal{F}_T] \geq c$ a.s. とあり, 前にあげた予想の証明において本質的だが, 式 (4.21) は成り立たないため, 正しいかわからない. 実際, $H_0 := \inf\{t \geq 0; W(t) = 0\}$ としたとき,

$$P^0[E_{j-} | \mathcal{F}_T] = P^{W(T)} \left[\sup_{y \in \mathbb{R}} l(H_0, y) \leq b_j, \sup_{0 \leq t \leq H_0} |W(t)| \leq 2b_j \right] \quad (4.22)$$

が強マルコフ性からわかるが、一方

$$\begin{aligned} & \inf_{|x| \leq b_j} P^x \left[\sup_{y \in \mathbb{R}} l(H_0, y) \leq b_j, \sup_{0 \leq t \leq H_0} |W(T)| \leq 2b_j \right] \\ &= \inf_{|x| \leq 1} P^x \left[\sup_{y \in \mathbb{R}} l(H_0, y) \leq 1, \sup_{0 \leq t \leq H_0} |W(T)| \leq 2 \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

であって、式 (4.23) の右辺はある定数 $c > 0$ で下からおさえられるが、式 (4.21) が成り立たないの
で、式 (4.22) の右辺 $\geq$ (式 (4.23) の左辺) $a.s.$ とはならないからである。

4.2 ランダムウォーク の favorite site

Brown 運動の場合と同様にランダムウォークの favorite site が定義できることは前に述べた。
1 章で出てきた定理を再掲しておく。

定理 1.1 (Eldös, Révész [8]) 確率 1 で以下がなりたつ。

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\overline{U}(n)|}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1.$$

定理 1.3 (Lifshits, Shi [11]) 確率 1 で以下がなりたつ。

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\underline{U}(n)|}{\sqrt{n}(\log n)^{-1}} = 0.$$

定理 1.4 $\gamma > 10$ のとき、確率 1 で以下がなりたつ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\underline{U}(n)|}{\sqrt{n}(\log n)^{-\gamma}} = \infty.$$

これらの定理の証明であるが、ここで有力なのが、Brown 運動の local time とランダムウォークの local time との間の不変原理である。

定理 4.12 (Révész の不変原理 [12]) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 確率空間、 $\{W(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ を Brown 運動とする。
このとき、同じ確率空間上に単純ランダムウォーク $\{S_n\}_{n \geq 0}$ があって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して
 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}} |l(n, x) - N(n, x)| = o(n^{\frac{1}{4} + \varepsilon}).$$

定理 4.13 (Bass, Griffin [1]) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq 1} |l(t, x) - l(t, y)| = o(t^{\frac{1}{4} + \varepsilon}).$$

この2つの定理を使えば, Brown 運動の favorite site についての結果をほぼそのまま使える. 例えば, 定理 1.3 については, 式 (4.16)

$$\sup_{|x| \leq a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l(\tau_{r_k}, x) > \sup_{|y| > a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} l(\tau_{r_k}, y) + \sqrt{a_k} s_k - \sup_{y \in \mathbb{R}} l(\tau_{r_{k-1}}, y)$$

および定理 4.12, 4.13 より, 確率 1 で無限に多くの k があって,

$$\max_{|x| \leq a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} N([\tau_{r_k}], x) > \max_{|y| > a_k \sqrt{\tau_{s_k}^{(k)}}} N([\tau_{r_k}], y) + \sqrt{a_k} s_k - \sup_{y \in \mathbb{R}} l(\tau_{r_{k-1}}, y) - \tau_{r_k}^{\frac{1}{4} + \varepsilon} \quad (4.24)$$

であるが, ここで, 式 (2.3) および命題 3.14 を使えば, 確率 1 で $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathbb{R}} l(\tau_{r_{k-1}}, y) + \tau_{r_k}^{\frac{1}{4} + \varepsilon} &\leq \tau_{r_{k-1}}^{\frac{1}{2}} \log \tau_{r_{k-1}} + \tau_{r_k}^{\frac{1}{4} + \varepsilon} \\ &\leq r_{k-1} (\log r_{k-1})^2 + r_k^{\frac{1}{2} + 2\varepsilon} (\log r_k)^{\frac{1}{4} + \varepsilon} \\ &= o(\sqrt{a_k} s_k) \end{aligned}$$

となるので, 式 (4.24) の右辺の第 2 項と第 3 項, 第 4 項は相殺できる. よって,

$$|\underline{U}([\tau_{r_k}])| \leq a_k \sqrt{\tau_{r_k}}$$

がわかり, あとは定理 4.3 のときと同様である.

定理 1.4 は次のようにしてわかる. $\tau_{r-} \leq t \leq \tau_r$, $k(t) = t^{1/2} (\log t)^{-(2\alpha + \varepsilon)}$ であった. 式 (4.9)

$$\sup_{|x| \leq k(t)} l(t, x) + r (\log r)^{-\beta} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x)$$

において, 命題 3.14 を使えば r が十分大きいとき $\tau_r^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \leq r (\log r)^{-\beta}$ であるから,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x) \geq \sup_{|x| \leq k(t)} l(t, x) + t^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

となる. ここで, 定理 4.12, 4.13 を使えば,

$$\max_{|x| \leq k(n)} N(n, x) < \max_{x \in \mathbb{Z}} N(n, x)$$

がわかり, 定理 1.4 が証明された. $\square$

謝辞

本論文を書くにあたって, 内山 耕平 教授には多大なる指導および助言を頂きましたことを感謝いたします. また, 爲永 恵太 氏, 春日 尚樹 氏, 野田 忠 氏, 長沢 啓明 氏, 井上 卓之 氏には本論文作成に関して多くの的確なコメントをいただきました. ここでお礼を申し上げます.

参考文献

- [1] R.F.Bass and P.S.Griffin, The most visited site of Brownian motion and simple random walk. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **70** 417-436, 1985.
- [2] K.L.Chung, On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. *T.A.M.S.* **64** 205-233, 1948.
- [3] E.Csáki and A.Földes, How small are the increments of the local time of a Wiener process ? *Ann.Probab.* **14-2** 533-546, 1986.
- [4] J.D.Deuschel and D.W.Stroock, *Large Deviations*. Academic Press,Inc, 1989.
- [5] M.D.Donsker and S.R.S.Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time, in Functional Integration and Its Applications. *Proceedings of the International Conference, London; Clarendon Press, Oxford* 15-33, 1975.
- [6] M.D.Donsker and S.R.S.Varadhan, Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I. *Comm.Pure.Appl.Math.* **28** 1-47, 1975.
- [7] M.D.Donsker and S.R.S.Varadhan, On laws of the iterated logarithm for local times. *Comm.Pure Appl.Math.* **30** 707-753, 1977.
- [8] P.Eldös and P.Révész, On the favorite points of a random walk. *Mathematical Structure-Computational Mathematics-Mathematical Modelling* **2** 152-157. Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1984.
- [9] B.Fristedt, *Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. In: Advances in probability and related topics* Vol.3 New York : Marcel Dekker 1974.
- [10] H.Kesten, An iterated logarithm law for local time. *Duke Math.J.* **32** 447-456, 1965.
- [11] M.A.Lifshits and Z.Shi, The escape rate of favorite sites of simple random walk and Brownian motion. *Ann.Probab.* **32-1A** 129-152, 2004.
- [12] P.Révész, Local time and invariance. *Analytical Methods in Probability Theory. Lecture Notes in Math.* **861** 128-145, Springer, Berlin, 1981.
- [13] D.Revuz and M.Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3rd ed. Springer Berlin, 1999.
- [14] H.F.Trotter, A property of Brownian motion paths. *Illinois J.Math.* **2** 425-433, 1958.
- [15] D.A.Williams, Path. decomposition and continuity of local time for one-dimentional diffusions. *Proc. Lond. Math. Soc.* **28** 738-768, 1974.