

ブラウン運動の局所時間の漸近的性質

03M00160 高橋 直人

2005 年 2 月 17 日

1 次元 Brown 運動の local time を考え、時刻 t における local time が最大となるような場所 $V(t)$ を考える。この $V(t)$ は favorite site と呼ばれている。Bass, Griffin [1] は初めて favorite site の漸近挙動を研究し、いくつかの結果を得たが、それ以上の詳しいことはあまり知られていない。今回の発表では、favorite site の漸近挙動を理解するために、おもに Donsker-Varadhan の大偏差原理の立場から local time の重複対数の法則を調べてみた。

Local time

$\{W(t)\}_{t \geq 0}$ を原点から出発する 1 次元 Brown 運動とする。固定した $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$l(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \text{meas}\{0 \leq s \leq t; |W(s) - x| \leq \varepsilon\}$$

が確率 1 で定義できる。ただし、meas はルベーグ測度である。さらに、 $l(t, x)$ は t と x の 2 変数関数として連続にとり直すことができる。この $l(t, x)$ を (Brown 運動の) local time と呼ぶ。

大偏差原理

$\{W(t)\}_{t \geq 0}$ を原点から出発する 1 次元 Brown 運動、 $\xi^\lambda(\cdot) \in C[0, 1]$ をパラメータ λ ($\lambda > 3$) の過程として以下で定義する。

$$\xi^\lambda(x) := \frac{W(\lambda x)}{\sqrt{2\lambda \log \log \lambda}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$C[0, 1]$ 上の Hilbert 空間 H を

$$H := \left\{ f \in C[0, 1]; f(0) = 0, f \text{ は絶対連続で } f(t) = \int_0^t h(s) ds \text{ for some } h \in L^2[0, 1] \right\}$$

で定義する。 H のノルムは $\|f\|_H := \sqrt{\int_0^1 |f'(s)|^2 ds}$ とする。 $K := \{f \in H; \|f\|_H \leq 1\}$ とおく。このとき以下が成り立つ。

定理 2.1 (Strassen の定理 [2])

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{\xi^\lambda; \lambda \geq n\}} = K \quad a.s.$$

一方, Brown 運動の local time を $l(t, x)$ として, $\hat{l}_\lambda$ をパラメータ λ ($\lambda > 3$) の過程として以下で定義する.

$$\hat{l}_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{\log \log \lambda}} l\left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{\log \log \lambda}} x\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

空間 $\mathcal{C}$ を以下で定める. ただし, $\mathcal{C}$ には広義一様収束位相が入っているものとする.

$$\mathcal{C} := \{f \geq 0; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq 1, f \text{ は } (-\infty, \infty) \text{ で一様連続}\}$$

さらに $\hat{K} := \left\{f \in \mathcal{C}; \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f'(x)]^2}{f(x)} dx \leq 1\right\}$ とする.

定理 2.3 (Donsker-Varadhan の定理 [3])

$$\bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\hat{l}_\lambda(\cdot); \lambda \geq T\}} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\hat{l}_\lambda(\cdot + y); y \in \mathbb{R}, \lambda \geq T\}} = \hat{K} \quad a.s.$$

Strassen の定理は, Brown 運動の軌跡が平均的な挙動よりも原点から遠くにあるときの偏差の度合いを見ている, といえる. 例えば, Brown 運動の重複対数の法則

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad a.s.$$

は Strassen の定理からわかる. 一方, Brown 運動の軌跡が平均的な挙動よりも原点の近くにあるときの偏差の度合いを見る場合は, Donsker-Varadhan の定理を用いる. 例えば,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{l(t, 0)}{\sqrt{2t \log \log t}} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} l(t, x)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad a.s.$$

は, 原点での local time が平均的な挙動よりも大きいときを見ているが, これは Brown 運動がいつもより原点近くに滞在していると考えられるから, Donsker-Varadhan の定理を使うことになる.

Favorite site

$\{W(t)\}_{t \geq 0}$ を 1 次元 Brown 運動として, Brown 運動の local time を $l(t, x)$ とする. $t \geq 0$ に対して, Brown 運動の favorite site の集合 $\mathbb{V}(t)$ を

$$\mathbb{V}(t) := \{x \in \mathbb{R}; l(t, x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} l(t, y)\}$$

で定義する. $\mathbb{V}(t)$ は Brown 運動の local time が x で最大となるような場所 x の全体である. $\mathbb{V}(t)$ の元のうち原点に最も近いものを $\underline{V}(t)$, 原点に最も遠いものを $\overline{V}(t)$ とおく.

定理 1.1 (Bass, Griffin [1])

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|\overline{V}(t)|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad a.s.$$

定理 1.2 (Bass, Griffin [1])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|V(t)|}{\sqrt{t}(\log t)^{-\gamma}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \gamma < 1 \\ \infty & \text{if } \gamma > 11 \end{cases} \quad a.s.$$

その後, Lifshits, Shi ([4]) が上式で, $\gamma = 1$ については $\liminf$ が 0, $1 < \gamma \leq 11$ については ∞ であると論文で発表した, $1 < \gamma \leq 11$ については証明に誤りがあることを著者は指摘した. 一方, 著者は定理 1.2 で $\gamma > 10$ へと改良できることに気付いた.

$1 < \gamma \leq 10$ についてどうなのかは, まだよくわかっていない. 大偏差原理の立場から見れば, 定理 1.1 は Strassen の定理を使えば容易に予想がつくが, 定理 1.2 については, 大偏差原理だけでは見当がつかない.

参考文献

- [1] R.F.Bass and P.S.Griffin, The most visited site of Brownian motion and simple random walk. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **70** 417-436, 1985.
- [2] J.D.Deuschel and D.W.Stroock, *Large Deviations*. Academic Press, Inc, 1989.
- [3] M.D.Donsker and S.R.S.Varadhan, On laws of the iterated logarithm for local times. *Comm. Pure Appl. Math.* **30** 707-753, 1977.
- [4] M.A.Lifshits and Z.Shi, The escape rate of favorite sites of simple random walk and Brownian motion. *Ann. Probab.* **32-1A** 129-152, 2004.